Développement : Décomposition polaire

RM

2022-2023

Référence

1. H2G2 tome 1 p 348

Énoncé :

Théorème (Décomposition polaire) : L'application $\mu : \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \mapsto & OS \end{array}$ est un homéomorphisme

Énoncé du livre/Plan :

1. Définition et continuité de μ.
2. Surjectivité de l'application.
3. Injectivité de l'application.
4. Continuité de la réciproque de μ.

Résolution :

Lemme 1 : $O_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$.

Démonstration : Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et bornée car $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

• $O_n(\mathbb{R})$ est fermé car il est réciproque du fermé $\{I_n\}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ par l'application continue $f : M \mapsto {}^tMM$.

• Avec la norme subordonné de matrice $|||A|||_2 = \sup\limits_{x \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$, qui est égale à $|||A|||_2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|_2$, on a pour $M \in O_n(\mathbb{R})$ que :

$$\|Mx\|_2 = {}^t(Mx)Mx = {}^tx{}^tMMx = {}^txx = \|x\|_2 = 1$$

On a donc que $|||M|||_2 = 1$ et donc l'ensemble est bornée.

Lemme 2 : $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$

Démonstration : Montrons d'abords que $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est fermé puis une double inclusion.

• $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé car un s.e.v de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $(S_k) \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que $S_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} M$. Comme $S_k \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})$ et que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé, on en déduit que $M \in S_n(\mathbb{R})$.

Ensuite, soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$, alors ${}^txS_kx \geq 0$ et par continuité de l'application $M \mapsto {}^txMx$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} {}^txS_kx = {}^tx(\lim_{k \to +\infty} S_k)x = {}^txMx \geq 0$$

On en déduit que $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et donc que n'importe quel suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ converge dans elle même. C'est donc bien fermé.

- Comme $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \overline{\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Pour l'inclusion inverse, montrons qu'une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe P orthogonale tel que $S = Pdiag(N_1, ..., N_n)P^{-1}$.
On pose alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = Pdiag(N_1 + \frac{1}{k}, ..., N_n + \frac{1}{k})P^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} S$.
On a alors $S_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $N_k > 0$ (car $N_i \geq 0$ comme $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$). On a donc bien trouvé notre suite de matrice, donc l'inclusion est prouvé.

Lemme 3 : Une suite possédant une seule valeur d'adhérence a dans un compact converge vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers a.
Alors on peut trouver une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante telle que cette suite ne converge pas vers a.
Mais comme elle est dans un compact, elle admet une valeur d'adhérence $b \neq a$. Mais alors b est aussi une valeur de (x_n). Absurde, donc on en déduit que (x_n) converge bien vers a.

1. L'application μ est bien définis car $det(OS) = det(O)det(S) \neq 0$ car O inversible et 0 n'est pas valeur propre de S donc $OS \in GL_n(\mathbb{R})$.
   Enfin μ est bien continue car polynomial en les coefficients de O et de G.

2. Soit M dans $GL_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^tMM$ est donc symétrique réelle, et même définie positive. En effet , soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors ${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|Mx\|_2^2 > 0$ car X est non nul. On peut alors utiliser le théorème spectrale pour diagonaliser ${}^tMM$ dans une base orthonormée :
$$ {}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} $$
   Pour $P \in O_n(\mathbb{R})$ convenable, et on a que $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i > 0$ car ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose alors :
$$ S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} $$
   C'est une matrice symétrique , puisque P est orthogonale, et définie positive, car ses valeurs propres sont strictement positives.
   On a : $S^2 = {}^tMM$ et, si l'on pose : $O = MS^{-1}$, il vient :
$$ {}^tOO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^tS^{-1t}MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n $$
   Ainsi, $M = OS$, ou $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc μ est surjective.

3. Montrons maintenant l'injectivité de μ.
   Supposons que l'on ait : $M = OS = O'S'$, avec $O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Alors on a :
$$ S^2 = {}^tMM = {}^t(O'S')O'S' = tS'^tO'O'S' = S'^2 $$
   Soit Q un polynôme tel que pour tout i, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.
   On peut, quitte à renuméroter les λ_i, on peut supposer que $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont distincts et que $\lambda_{r+1}, ..., \lambda_n$ apparaissent parmi ceux là. On prend alors :
$$ Q(X) = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} \prod_{1\leq j\leq rj\neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} $$

Alors,

$$\begin{aligned}
S &= P\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1} = PQ\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)P^{-1} \\
&= Q\left(P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}\right) = Q(S^2) = Q(S'^2)
\end{aligned}$$

Or, S' commute avec S'^2, donc avec $Q(S'^2) = S$, et donc S' et S, qui sont diagonalisables, car symétriques réelles, sont diagonalisables dans une base commune.

| car S est polynomial en S', ce qui rend la codiagonalisation encore plus directe

Il existe ainsi une matrice de passage P_0 qui permet de les diagonaliser simultanément.
Ainsi si l'on note

$$diag(\mu_i) = \begin{pmatrix}\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n\end{pmatrix}$$

On a : $S' = P_0 diag(\mu_i')P_0^{-1}$ et $S = P_0 diag(\mu_i)P_0^{-1}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
S'^2 = S^2 &\Rightarrow P_0 diag(\mu_i'^2)P_0^{-1} = P_0 diag(\mu_i^2)P_0^{-1} \\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1\,;n]\!], \mu_i'^2 = \mu_i^2 \\
&\Rightarrow \forall i \in [\![1\,;n]\!], \mu_i' = \mu_i \ \text{ (car } \ \mu_i, \mu_i' \in \mathbb{R}_+^*) \\
&\Rightarrow S = S'
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $O = O'$, d'où, finalement, l'injectivité de μ.

4. Il reste à montrer que μ^{-1} est continue. Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M.
   On note, pour tout entier p : $(O_p, S_p) = \mu^{-1}(M_p)$, de sorte que $M_p = O_p S_p$, et $\mu^{-1}(M) = (O, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On montre que les suites (O_p) et (S_p) convergent respectivement vers O et S.
   On sait que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Soit $\overline{O}$ une valeur d'adhérence de $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$,i.e telle que $O_{\varphi(p)}$ converge vers $\overline{O}$ pour une sous-suite $(O_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ de (O_p).
   Alors, la sous-suite $S_{\varphi(n)}$ converge vers $\overline{O}^{-1}M$n matrice symétrique définie positive car :

$$\overline{S} = \overline{O}^{-1}M \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

   On a donc $M = \overline{OS}$ et par unicité de la décomposition polaire $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$.
   O est donc la seule valeur d'adhérence de la suite (O_p) qui est une suite dans un espace compact, alors on a que (O_p) converge vers O et comme (M_p) converge vers M, on a que (S_p) converge vers S.
   On a donc montrer que si (M_p) converge vers M, alors $\mu^{-1}(M_p)$ converge vers $\mu^{-1}(M)$, c'est donc que μ^{-1} est continue.